Simon Bonaventure Mbogle Tcheke

simon.mbogle@yahoo.com

Résumé

Nous présentons les deux exercices de l’épreuve et les traitons complètement. L’exercice 1 est relatif aux équations différentielles, alors que l’exercice 2 concerne les nombres complexes, plus précisément les similitudes directes dans le plan complexe.

Les trois parties du problème sont résolues Cette solution s’est construite avec la présence de mon jeune ami Dave Wamba, que je remercie pour sa patience et surtout sa détermination à comprendre ces concepts.

J’assume les erreurs et manquements présentes dans ce texte.

Bac D-TI 2018

Epreuve de mathématiques



Figure 1 Pont sur la Sanaga a Edea

Table des matières

[Exercice 1 (4 points) 2](#_Toc40285977)

[Solution 3](#_Toc40285978)

[Question 1 Equation différentielle (E) 3](#_Toc40285979)

[Question 2 Affirmations 1 – 2 - 3 3](#_Toc40285980)

[Exercice 2 (5 points) 5](#_Toc40285981)

[Solution 5](#_Toc40285982)

[Question 1 Angles, rapports des similitudes  : 5](#_Toc40285983)

[Question 2 Similitude de centre A et de rapport 6](#_Toc40285984)

[Problème 8](#_Toc40285985)

[Solution 9](#_Toc40285986)

[Partie A Etude de la fonction et graphe de f 9](#_Toc40285987)

[Question 1 Limites de f aux bornes de son domaine de définition 9](#_Toc40285988)

[Question 2 : Asymptote oblique à la courbe Cf en , d’équation y=2x-1 position relative de Cf et de son asymptote. 10](#_Toc40285989)

[Question 3 Dérivée première et seconde de f, tableau de variations, concavité : 11](#_Toc40285990)

[a) Dérivées première et seconde de f 11](#_Toc40285991)

[b) Limites de f’(x) aux bornes et tableau de variations de f’(x) 11](#_Toc40285992)

[c) Calcul de f’(1) et signe de f’(x) 12](#_Toc40285993)

[Question 4 Equation f(x)=0 sur l’intervalle I=[1.9 ; 2] 12](#_Toc40285994)

[Question 5 Trace de la courbe Cf 13](#_Toc40285995)

[Partie B Recherche de l’approximation de α 15](#_Toc40285996)

[Question 1 Equivalence f(x)=0 et g(x)=x sur I=[1.9 ; 2] 15](#_Toc40285997)

[Question 2 Variations de g(x) sur I=[1.9 ; 2] 15](#_Toc40285998)

[Question 3 Majoration de |g’(x)| sur I 15](#_Toc40285999)

[Question 4 Convergence de la suite  : 16](#_Toc40286000)

[a) Démontrer que, pour tout 𝑛 de ℕ, 16](#_Toc40286001)

[b) En déduire, en raisonnant par récurrence, que : pour tout entier naturel 16](#_Toc40286002)

[16](#_Toc40286003)

# Exercice 1 (4 points)

1. On considère 𝑎 et 𝑏 deux réels, avec 𝑎 non nul.

Démontrer que les fonctions de la forme 𝑥 ⟼ , où C est un réel, sont des solutions de l’équation différentielle : 𝑦 ′ = 𝑎𝑦 + 𝑏 (E). (On admettra par la suite que ce sont les seules). 1pt

1. Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

**a) Affirmation 1** : si une fonction f définie sur l’ensemble des nombres réels ℝ est solution de l’équation différentielle 𝑦 ′ + 3𝑦 = 6, alors la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en +∞. 1pt

**b) Affirmation 2** : si une fonction f définie sur l’ensemble des nombres réels ℝ est solution de l’équation différentielle 𝑦 ′ = 𝑦 alors pour tous réels 𝛼 et 𝛽, 𝑓(𝛼 + 𝛽) = 𝑓(𝛼) × 𝑓(𝛽). 1pt

**c) Affirmation 3** : la courbe d’une fonction solution de l’équation différentielle 𝑦 ′ = −2𝑦 coupe l’axe des ordonnées au point d’ordonnée (voir figure ci-contre) ; l’aire, en unité d’aire, du domaine délimité par l’axe des abscisses, la courbe et les droites d’équations respectives 𝑥 = 0 et 𝑥 = ln(3), est 2/3 . 1pt



Figure 2 Graphe

## Solution

### Question 1 Equation différentielle (E)

L’équation différentielle : (E) a pour solution la fonction , signifie que en calculant séparément , on trouve une égalité :

Si on trouve

, donc :

Finalement

### Question 2 Affirmations 1 – 2 - 3

**Affirmation 1 :**

***Si une fonction f définie sur l’ensemble des nombres réels ℝ est solution de l’équation différentielle , alors la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en +∞.***

L’équation

Donc d’après la Question 1 : .

Comme

On en déduit que le graphe de , admet pour asymptote horizontale d’équation y=2 en

**VRAI**

**Affirmation 2** :

***Si une fonction f définie sur l’ensemble des nombres réels ℝ est solution de l’équation différentielle 𝑦 ′ = 𝑦 alors pour tous réels 𝛼 et 𝛽, 𝑓(𝛼 + 𝛽) = 𝑓(𝛼) × 𝑓(𝛽).***

Nous voyons que l’équation . Nous appliquons le résultat de l’équation, et obtenons

The two expressions are only equal if , not for any C.

**FAUX**

**Affirmation 3** :

La courbe d’une fonction solution de l’équation différentielle 𝑦 ′ = −2𝑦 coupe l’axe des ordonnées au point d’ordonnée (voir figure ci-contre) ; l’aire, en unité d’aire, du domaine délimité par l’axe des abscisses, la courbe et les droites d’équations respectives 𝑥 = 0 et 𝑥 = ln(3), est 2/3

L’équation différentielle donc a pour solution

Cette aire est donnée par :

On utilise le fait que

**VRAI**

# Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d’un repère orthonormal direct

On considère les points A et B d’affixes respectives et

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-contre.

On note la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note la similitude directe de centre O qui transforme B en N.

Le but de l’exercice est de démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.



1) Donner l’angle et le rapport de et de . 2pts

2) a) En utilisant les résultats de la question 1, donner les écritures complexes de et de . 1pt

b) En déduire les affixes et des points M et N. 1pt

c) donner par lecture graphique, l’affixe du point P, puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires. 1pt

## Solution

### Question 1 Angles, rapports des similitudes  :

L’angle de la similitude est l’angle MAB soit , pour rappel A est le centre de la similitude

Le rapport de la similitude est

L’angle de la similitude est l’angle BON soit , pour rappel O est le centre de la similitude

Le rapport de la similitude est

### Question 2 Similitude de centre A et de rapport

1. On écrit : , avec

Mais

Finalement :

Et

1. On écrit

Finalement :

De même,

Nous calculons :

Ainsi,

On voit que les droites (PN) et (OM) sont perpendiculaires, de plus : les segments PN et OM sont de même mesure, car .

On aurait pu, tout autant, utiliser le produit scalaire des vecteurs :  (puisque dans un repère orthonormé, dire que deux vecteurs sont orthogonaux revient à dire que leur produit scalaire est nul) :

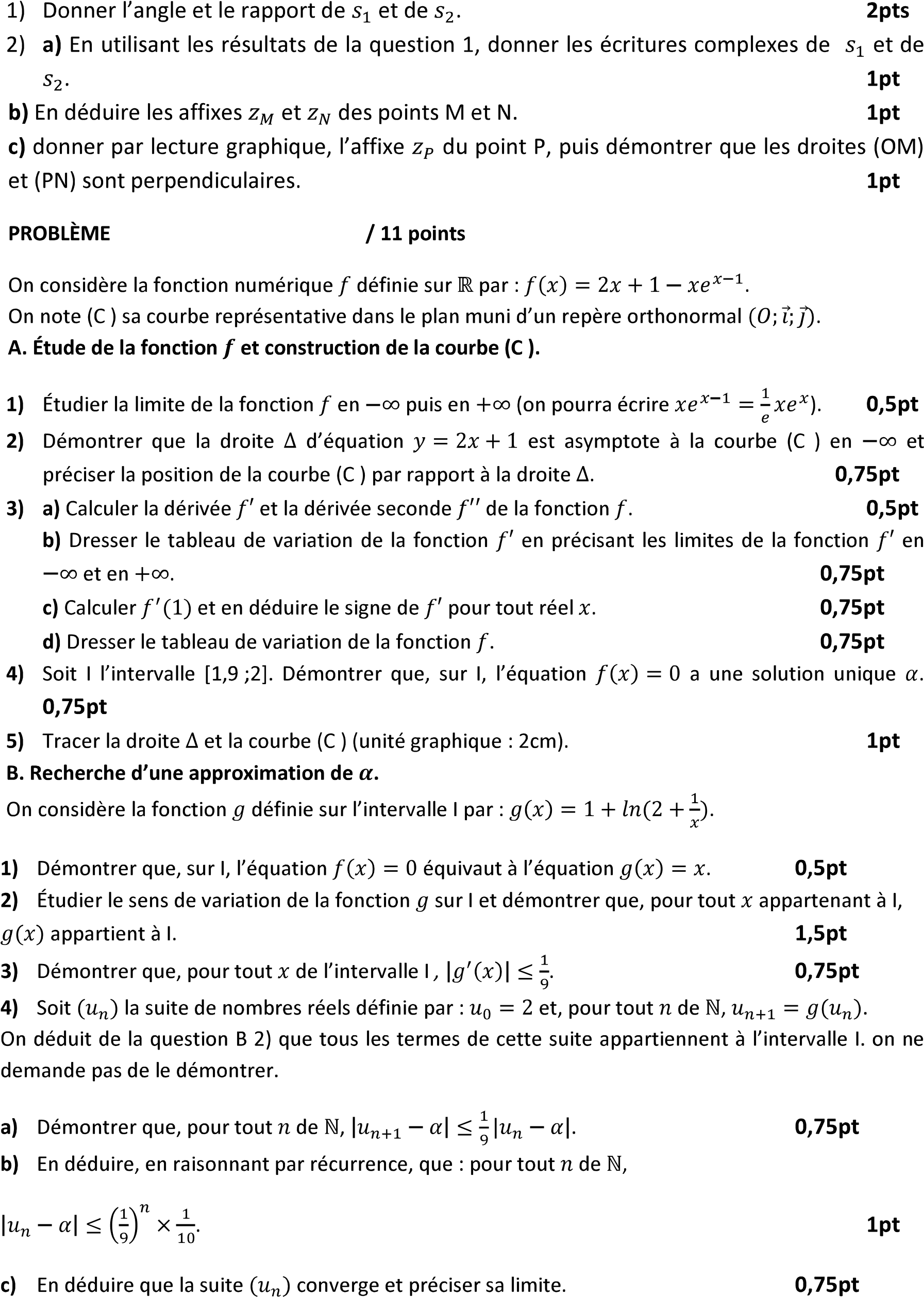
Retenons :

Toute **similitude directe** du plan complexe s’écrit :  
   
avec le centre de la similitude directe A d’affixe ,   
r = le rapport de la similitude,   
et enfin l’angle de la similitude.

Toute **rotation** du plan complexe s’écrit :avec le centre de la rotation A d’affixe ,   
une rotation n’est qu’une similitude directe de rapport r=1,   
et enfin l’angle de la rotation.

Toute **homothétie** de centre A et de rapport k s’écrit :, k étant le rapport de l’homothétie et A son centre d’affixe

# Problème



# Solution

Ce problème concerne l’étude de la fonction numérique

Nous voyons que f est une fonction définie sur , puisque

, deux fonctions continues et dérivables sur leur domaine de définition .

## Partie A Etude de la fonction et graphe de f

### Question 1 Limites de f aux bornes de son domaine de définition

En , on a :

Finalement

En , on a :

Finalement

### Question 2 : Asymptote oblique à la courbe Cf en , d’équation y=2x-1 position relative de Cf et de son asymptote.

Pour établir que la droite d’équation y=2x+1 est une asymptote de en il suffit de prouver que :

, or :

La position relative de la droite d’équation et de la courbe résulte du signe de

Conclusion :

Tableau 1 Position relative de La courbe et son asymptote

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 0 |  |
|  | + | - |
| Position relative de | est située au-dessus de la droite sur ] | est située en dessous de la droite sur |

### Question 3 Dérivée première et seconde de f, tableau de variations, concavité :

### Dérivées première et seconde de f

Calcul de la dérivée première :

Conclusion **: f est une fonction dérivable sur de dérivée**

Calcul de la dérivée seconde :

**Conclusion : f est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est**

### Limites de f’(x) aux bornes et tableau de variations de f’(x)

De plus,

La dérivée de f’ change de signe en x=-2, finalement :

Tableau 2 Tableau de variations de f'

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | -2 |  |
| signe(f’’(x)) | + | - |
| f’(x) | 2 |  |
|  |  |  |

### Calcul de f’(1) et signe de f’(x)

Tableau 3 Tableau de variations de f

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 1 |  |
| signe(f’(x)) | + | - |
| f |  |  |

### Question 4 Equation f(x)=0 sur l’intervalle I=[1.9 ; 2]

Sur l’intervalle I, f est strictement décroissante, pour voir que f a une seule solution sur l’intervalle I, il suffit de montrer que f change de signe sur cet intervalle. Or,

Tableau 4 Table des valeurs de f sur {1.923 ; 1.927]

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **f(x)** |
| **1.923** | 0.006 |
| **1.924** | 0.001 |
| **1.925** | -0.005 |
| **1.926** | -0.010 |
| **1.927** | -0.015 |

Puisque la fonction f est continue et strictement decroissante sur [1.924, 1.925] il existe une solution de f(x)=0, notée α et 1.924< α <1.925

### Question 5 Trace de la courbe Cf

On utilise un tableau de valeurs

Tableau 5 Table des valeurs de f(x)

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **f(x)** |
| **-4** | -6.97 |
| **-3.5** | -5.96 |
| **-3** | -4.95 |
| **-2.5** | -3.92 |
| **-2** | -2.90 |
| **-1.5** | -1.88 |
| **-1** | -0.86 |
| **-0.5** | 0.11 |
| **0** | 1.00 |
| **0.5** | 1.70 |
| **1** | 2.00 |
| **1.5** | 1.53 |
| **2** | -0.44 |
| **2.5** | -5.20 |
| **3** | -15.17 |
| **3.5** | -34.64 |
| **4** | -71.34 |

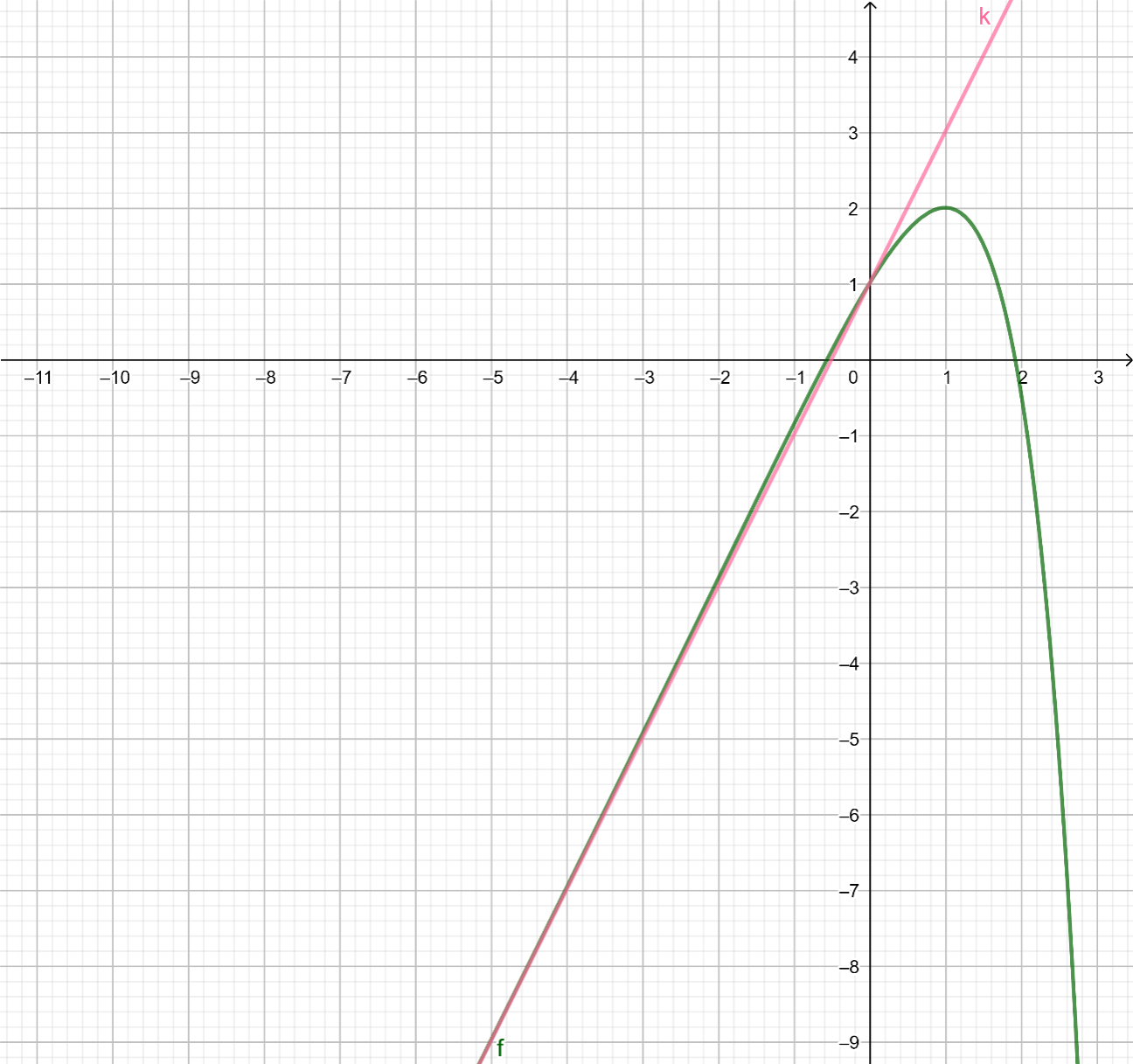


Figure 3 Courbe Cf

# Partie B Recherche de l’approximation de α

### Question 1 Equivalence f(x)=0 et g(x)=x sur I=[1.9 ; 2]

### Question 2 Variations de g(x) sur I=[1.9 ; 2]

La fonction g est une fonction continue dérivable sur I, on a :

Comme g’(x) <0 sur I, g est une fonction décroissante sur I.

### Question 3 Majoration de |g’(x)| sur I

On a :

Mais est croissante sur I, sa valeur minimale sur I est obtenue pour x=1.9, mais

Finalement

### Question 4 Convergence de la suite  :

### Démontrer que, pour tout 𝑛 de ℕ,

On sait que

, puisque

Comme , nous avons , par intégration, nous pouvons affirmer que si u, v sont dans I, .

Il suffit d’appliquer cette inégalité dans le cas où :

### En déduire, en raisonnant par récurrence, que : pour tout entier naturel

### 

Initialisation :

Caractère héréditaire :

Supposons que , montrons que ,

Cela résulte du fait que

Et ,,

Table 6 un pour n=0, 1, 3, … , 10

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **n** |  |  |
| **0** | 2 | 1.916290732 |
| **1** | 1.916290732 | 1.924989382 |
| **2** | 1.924989382 | 1.924053874 |
| **3** | 1.924053874 | 1.924154121 |
| **4** | 1.924154121 | 1.924143375 |
| **5** | 1.924143375 | 1.924144526 |
| **6** | 1.924144526 | 1.924144403 |
| **7** | 1.924144403 | 1.924144416 |
| **8** | 1.924144416 | 1.924144415 |
| **9** | 1.924144415 | 1.924144415 |
| **10** | 1.924144415 | 1.924144415 |

**La limite des est bien évidemment , nous avons une approximation de de 8 décimales.**